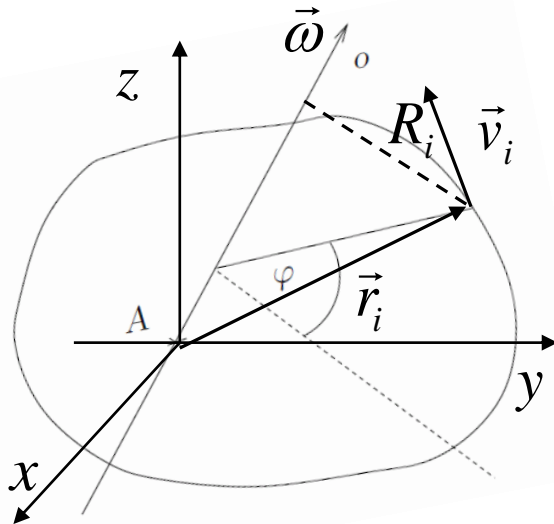


Opakování – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



- podle **Eulerovy věty** je rychlost libovolného bodu otáčejícího se tělesa kolem pevného bodu dána vzorcem :

$$\vec{v}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t), \quad v_i = \omega r_i \sin \alpha = \omega R_i$$

- Potom moment hybnosti celého tělesa je dán vztahem:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]$$

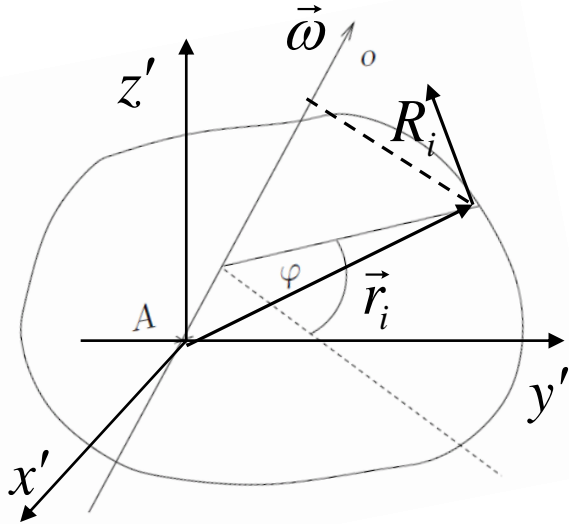
- Použijeme vzorec pro složený vektorový součin: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- a pro moment hybnosti celého tělesa dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Celkový moment hybnosti není obecně rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti. Toto je příčina složitého chování tuhých těles při rotaci kolem pevného bodu. Navíc jsou všechny tři veličiny v tomto vztahu časově závislé: $\vec{B} = \vec{B}(t), \vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

- Nelze tedy zavést časově nezávislý moment setrvačnosti jako v případě otáčení kolem pevné osy.

Opakování – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem. Počátek této soustavy zvolíme v počátku laboratorní soustavy.

Označíme-li v soustavě pevně spojené s rotujícím tělesem složky vektorů:

$$\vec{B} \equiv (\beta_x, \beta_y, \beta_z), \vec{r}_i \equiv (x'_i, y'_i, z'_i), \vec{\omega} \equiv (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$$

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

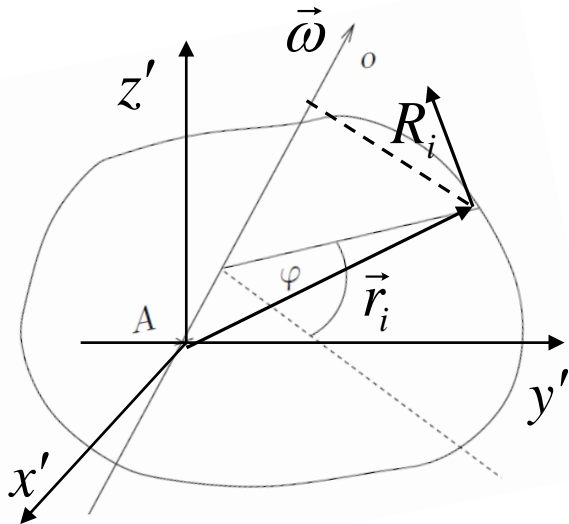
- Potom můžeme vektorovou rovnici rozepsat na složky:

$$\beta_x = \Omega_x \sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2) - \Omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i' - \Omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i'$$

$$\beta_y = -\Omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i' + \Omega_y \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + z_i'^2) - \Omega_z \sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i'$$

$$\beta_z = -\Omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i' - \Omega_y \sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' + \Omega_z \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

Opakování – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

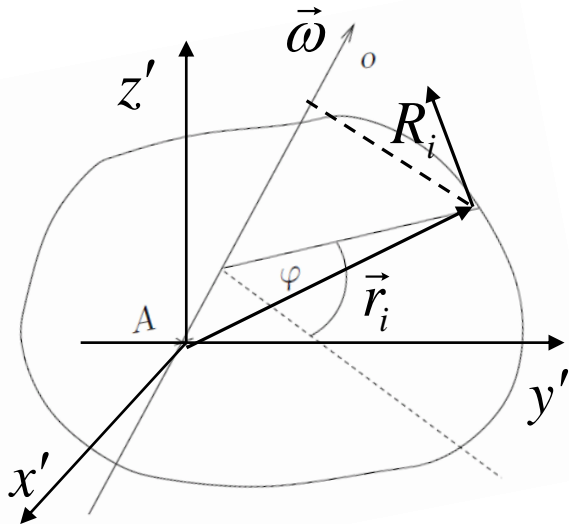
$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z}^3 J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

- A pro složky tenzoru setrvačnosti tedy dostaneme:

Momenty setrvačnosti
vzhledem k příslušným
osám soustavy souřadné
otáčející se s tělesem

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2), & J_{xy} &= J_{yx} = -\sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i' \\ J_{yy} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + z_i'^2), & J_{xz} &= J_{zx} = -\sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i' \\ J_{zz} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2), & J_{yz} &= J_{zy} = -\sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' \end{aligned}$$

Opakování – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z}^3 J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

- A pro složky tenzoru setrvačnosti tedy dostaneme:

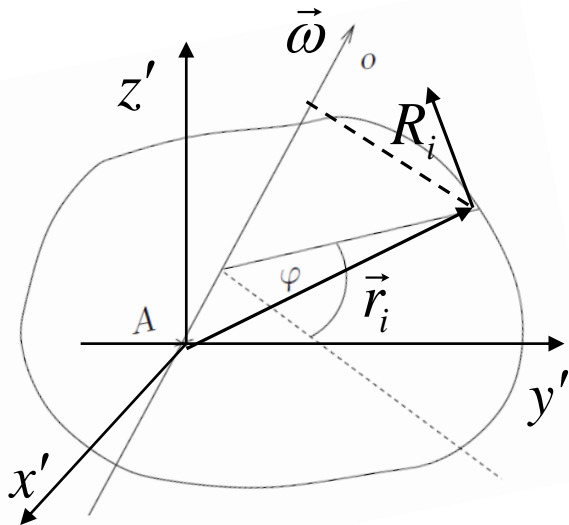
$$J_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2), \quad J_{xy} = J_{yx} = -\sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i'$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + z_i'^2), \quad J_{xz} = J_{zx} = -\sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i'$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2), \quad J_{yz} = J_{zy} = -\sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i'$$

Deviační momenty, související s momenty odstředivých sil, které působí na okamžitou osu rotace tělesa

Opakování – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



- Moment setrvačnosti je tedy tenzorová veličina. Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický tenzor 2. řádu:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

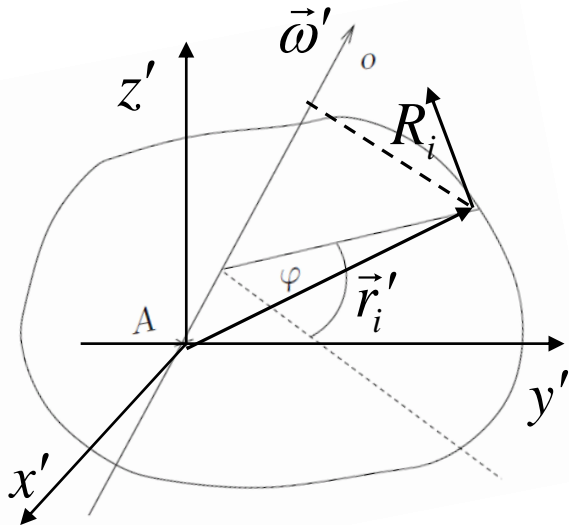
- Soustavu souřadnou spjatou s tělesem lze zvolit tedy tak, aby deviační momenty byly rovny nule. Vektor hybnosti lze potom psát jako:

$$\vec{B} = J\vec{\omega}, \text{ tedy } \beta_i = J\Omega_i \Rightarrow J\Omega_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij}\Omega_j, \text{ kde } i, j = x, y, z = 1, 2, 3$$

- Soustavu rovnic rozepíšeme:

$$\begin{aligned} (J_{xx} - J)\Omega_x + J_{xy}\Omega_y + J_{xz}\Omega_z &= 0 \\ J_{xy}\Omega_x + (J_{yy} - J)\Omega_y + J_{yz}\Omega_z &= 0 \\ J_{xz}\Omega_x + J_{yz}\Omega_y + (J_{zz} - J)\Omega_z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} J_{xx} - J & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} - J & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} - J \end{vmatrix} = 0$$

Opakování – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



- Rozepíšeme-li determinant dostaneme kubickou rovnici, která má tři reálné kořeny, pokud má tenzor momentu setrvačnosti reálné složky. Reálné kořeny (vlastní hodnoty) označíme:

$$J_1, J_2, J_3$$

- Pro každý kořen dostaneme z rovnice jeden vektor úhlové rychlosti (vlastní vektory). Tyto tři vektory jsou navzájem kolmé – **hlavní osy tenzoru setrvačnosti**:

$$\vec{\Omega}_1 \perp \vec{\Omega}_2 \perp \vec{\Omega}_3,$$

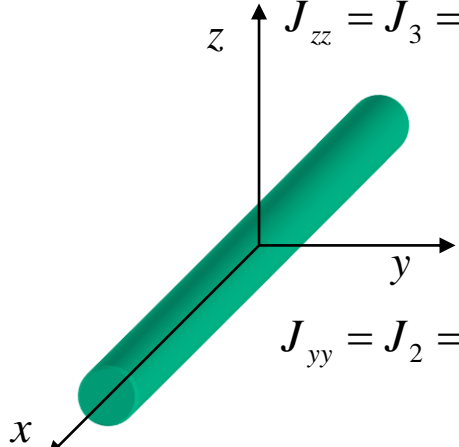
$$\vec{B}_k = J_k \vec{\Omega}_k, \text{ tedy } \vec{B}_k \parallel \vec{\Omega}_k \text{ kde } k = 1, 2, 3$$

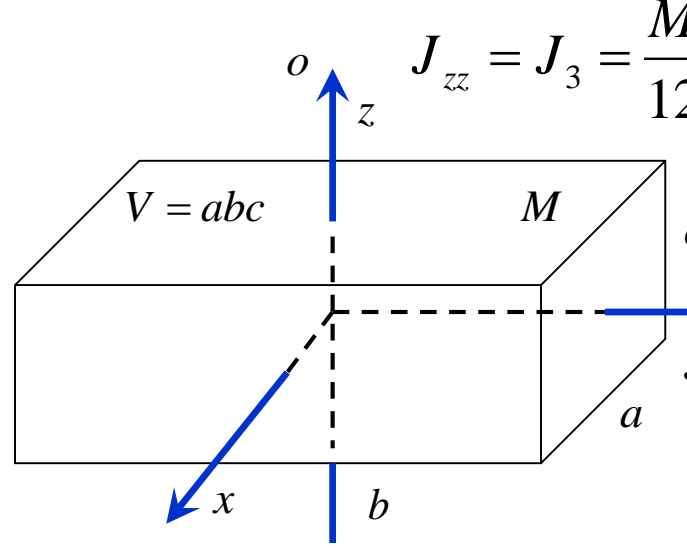
- Zvolíme-li soustavu souřadnou spjatou s tělesem ve směru těchto vektorů úhlových rychlostí (vlastních vektorů), potom jsou deviační momenty tenzoru setrvačnosti nulové. Momentům setrvačnosti ve směru hlavních os říkáme **hlavní momenty setrvačnosti** :

$$J_{xx} = J_1, \quad J_{yy} = J_2, \quad J_{zz} = J_3,$$

Opakování – Moment setrvačnosti

- **hlavní osy** tenzoru setrvačnosti tělesa odpovídají význačným osám symetrie zkoumaného tělesa
- každé těleso má 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem takové, že
 - J vůči jedné z nich je *největší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
 - J vůči další z nich je *nejmenší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
- př. Tyč délky l a kruhového průřezu o poloměru r : Kvádr o rozměrech a, b, c :

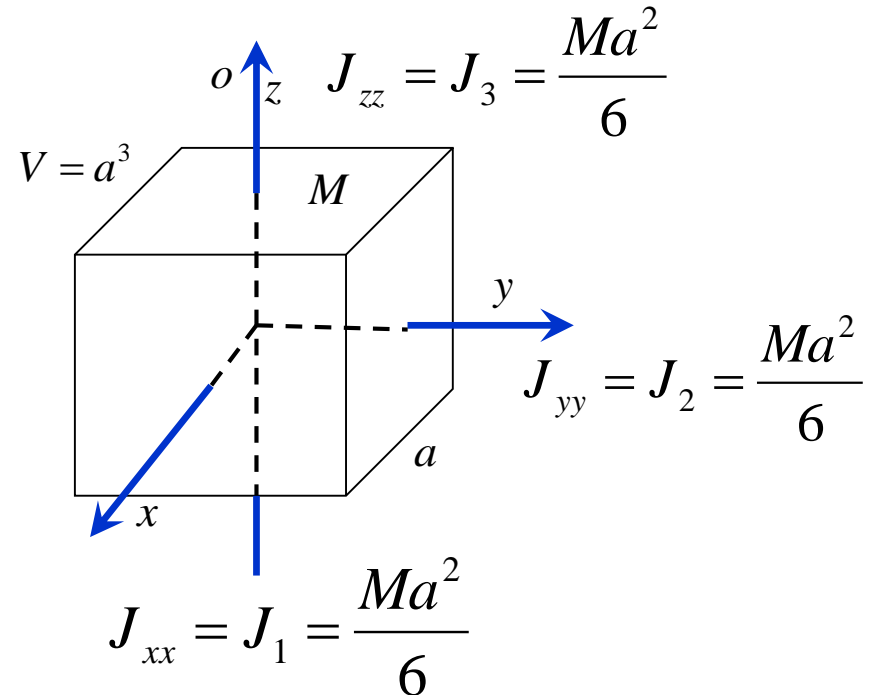
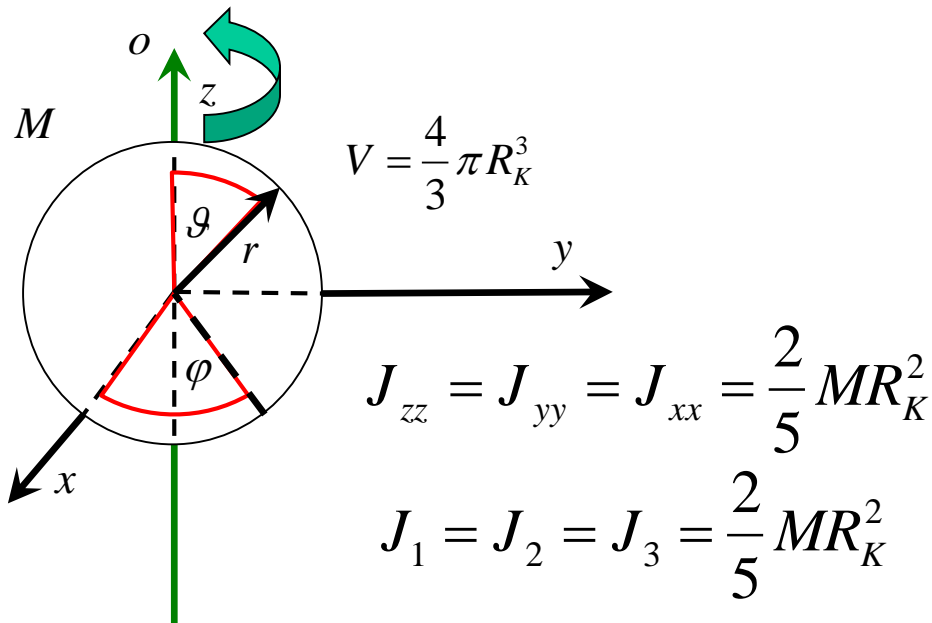

$$J_{zz} = J_3 = \frac{1}{12} M l^2$$
$$J_{yy} = J_2 = \frac{1}{12} M l^2$$
$$J_{xx} = J_1 = \frac{1}{2} M r^2$$


$$J_{zz} = J_3 = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$
$$J_{yy} = J_2 = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$
$$J_{xx} = J_1 = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

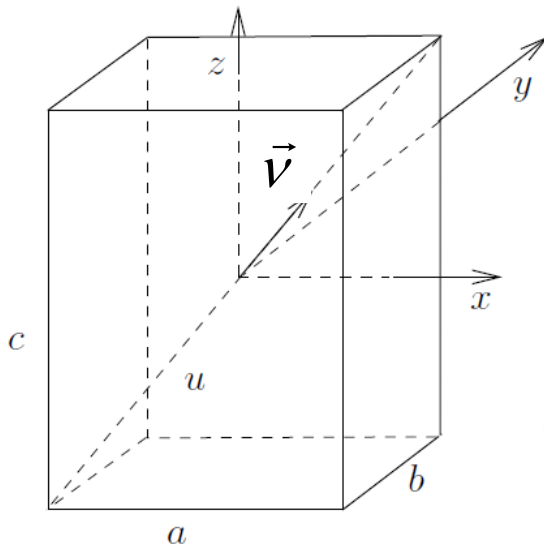
Opakování – Moment setrvačnosti

- **hlavní osy** tenzoru setrvačnosti tělesa odpovídají význačným osám symetrie zkoumaného tělesa
- každé těleso má 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem takové, že
 - J vůči jedné z nich je *největší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
 - J vůči další z nich je *nejmenší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
- př. Koule o poloměru R_K

Krychle o se stranou o velikosti a :



Opakování – moment setrvačnosti vůči libovolné ose tělesa



- Určíme si teď moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející bodem pro nějž známe tenzor setrvačnosti. Pokud zvolíme soustavu souřadnou v hlavních osách tenzoru momentu setrvačnosti budou nenulové pouze složky ležící na diagonále:

$$\vec{J}_H = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

- Průmět vektoru celkového momentu hybnosti do směru osy otáčení je stejná veličina jak v soustavě pevně spojené s tělesem, tak v soustavě pevné v prostoru:

$$\vec{v}\vec{B} = J\omega, \text{ tedy } \sum_{i=x,y,z} v_i \beta_i = J\omega \Rightarrow \sum_{i=x,y,z} v_i \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j = J\omega, \text{ kde } i, j = x, y, z$$

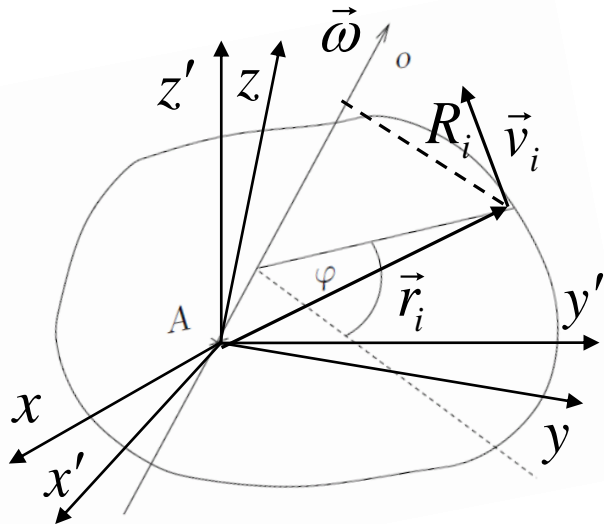
- Při otáčení kolem pevné osy má vektor úhlové rychlosti směr této osy:

$$\vec{\omega} = \vec{v}\omega, \text{ tedy } \Omega_j = v_j \omega \Rightarrow J\omega = \omega \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} v_i v_j J_{ij} \Rightarrow J = \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} v_i v_j J_{ij}$$

- Jelikož jsou deviační složky nulové dostaneme:

$$J = v_x^2 J_1 + v_y^2 J_2 + v_z^2 J_3$$

Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

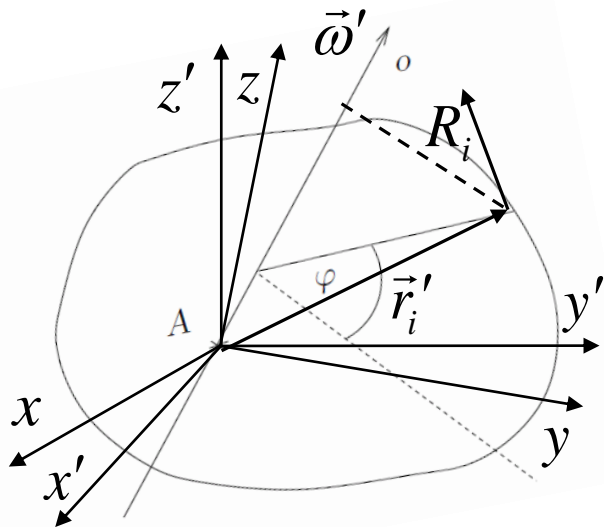
- Přejít od soustavy pevně spojené s tělesem k soustavě pevné v prostoru:

$$\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_T = 0, \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \Rightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_T = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\text{analogicky: } \frac{d\vec{B}}{dt} - \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T = \vec{\omega} \times \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T + \vec{\omega} \times \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T + \vec{\omega} \times \vec{B} = \vec{M}, \quad \text{kde } \vec{M} \equiv (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$$

Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

- Rozepíšeme poslední rovnici do složek:

$$\frac{d\beta_x}{dt} + \Omega_y \beta_z - \Omega_z \beta_y = \mu_x$$

$$\frac{d\beta_y}{dt} + \Omega_z \beta_x - \Omega_x \beta_z = \mu_y$$

$$\frac{d\beta_z}{dt} + \Omega_x \beta_y - \Omega_y \beta_x = \mu_z$$

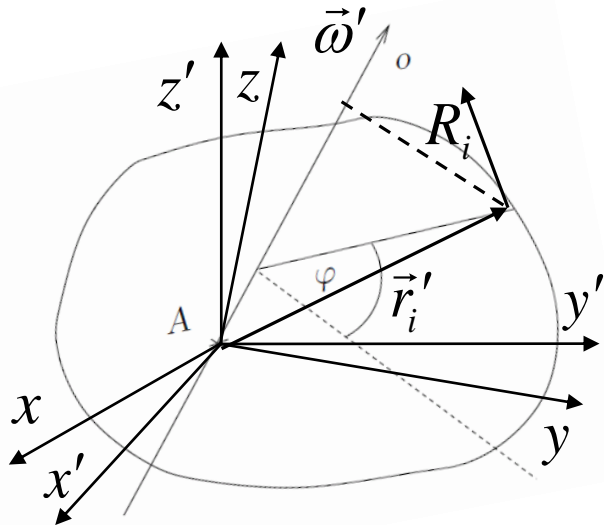
- dosadíme složky tenzoru setrvačnosti:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\beta_x = J_{xx} \Omega_x + J_{xy} \Omega_y + J_{xz} \Omega_z$$

$$\frac{d\beta_x}{dt} = J_{xx} \frac{d\Omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\Omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\Omega_z}{dt}$$

Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

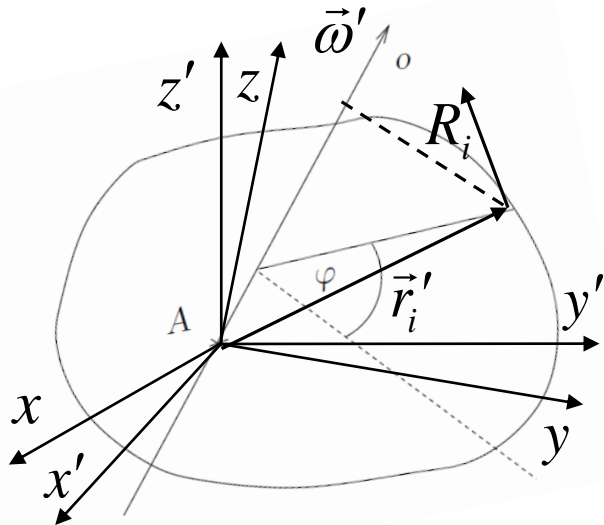
- Rozepíšeme poslední rovnici do složek:

$$J_{xx} \frac{d\Omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\Omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_y (J_{zx} \Omega_x + J_{zy} \Omega_y + J_{zz} \Omega_z) - \Omega_z (J_{yx} \Omega_x + J_{yy} \Omega_y + J_{yz} \Omega_z) = \mu_x$$

$$J_{yx} \frac{d\Omega_x}{dt} + J_{yy} \frac{d\Omega_y}{dt} + J_{yz} \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_z (J_{xx} \Omega_x + J_{xy} \Omega_y + J_{xz} \Omega_z) - \Omega_x (J_{zx} \Omega_x + J_{zy} \Omega_y + J_{zz} \Omega_z) = \mu_y$$

$$J_{zx} \frac{d\Omega_x}{dt} + J_{zy} \frac{d\Omega_y}{dt} + J_{zz} \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x (J_{yx} \Omega_x + J_{yy} \Omega_y + J_{yz} \Omega_z) - \Omega_y (J_{xx} \Omega_x + J_{xy} \Omega_y + J_{xz} \Omega_z) = \mu_z$$

Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

- Zvolím-li soustavu souřadnou spjatou s tělesem v hlavních osách tenzoru setrvačnosti:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

- Dostaneme **Eulerovy rovnice**:

$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_2) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x \Omega_y (J_2 - J_1) = \mu_z$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• Eulerovy rovnice:

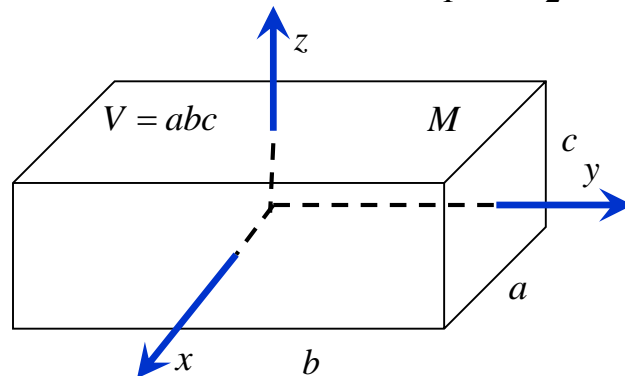
$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_2) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x \Omega_y (J_2 - J_1) = \mu_z$$

• Setrvačník - těleso otáčející se kolem pevného bodu:

• Asymetrický setrvačník - všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé: $J_1 \neq J_2 \neq J_3$

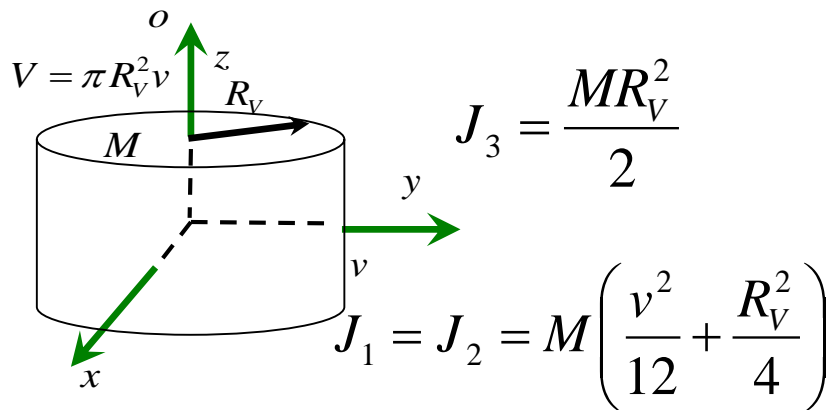


$$J_1 = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

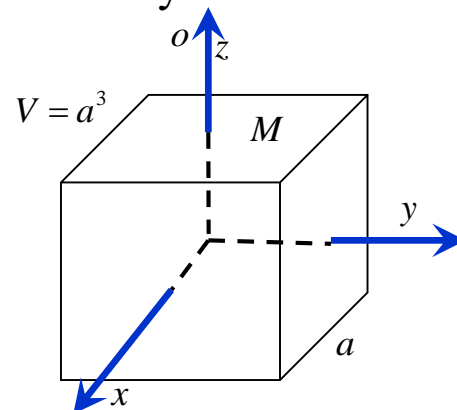
$$J_2 = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$

$$J_3 = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

• Symetrický setrvačník - dva hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 \neq J_3$



• Kulový setrvačník - všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 = J_3$



$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{Ma^2}{6}$$

Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

• Eulerovy rovnice:

$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_2) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x \Omega_y (J_2 - J_1) = \mu_z$$

• **Kulový setrvačnick**-všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 = J_3 = J$

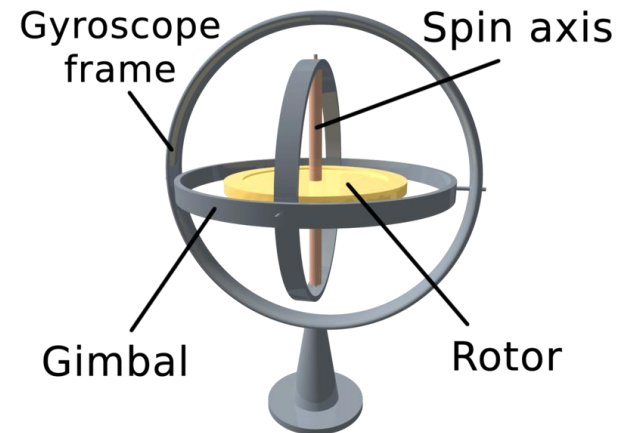
$$J \frac{d\Omega_x}{dt} = 0, \quad J \frac{d\Omega_y}{dt} = 0, \quad J \frac{d\Omega_z}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_x = konst, \quad \Omega_y = konst, \quad \Omega_z = konst.,$$

• **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



$$\beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j \Rightarrow \beta_x = J\Omega_x, \beta_y = J\Omega_y, \beta_z = J\Omega_z \Rightarrow \vec{B} = J\vec{\omega}$$

Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- Moment hybnosti je tedy násobkem vektoru úhlové rychlosti:

$$\vec{B} = J\vec{\omega}$$

- Nezávisí na volbě soustavy souřadnic, platí tedy i pro soustavu souřadnou pevnou v prostoru.

- Z druhé věty impulzové:

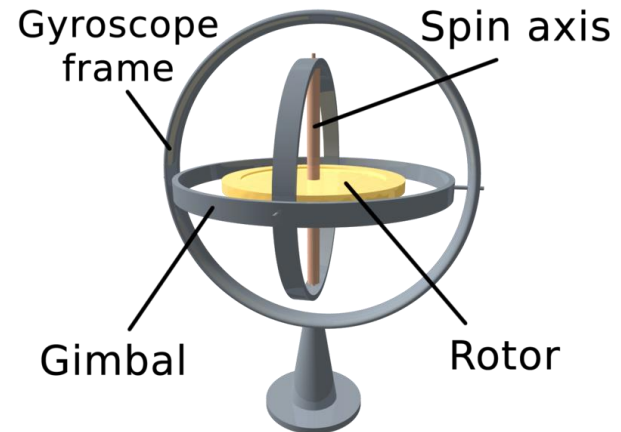
$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{B} = konst \Rightarrow \vec{\omega} = konst$$

- Volný kulový setrvačnick rotuje kolem své libovolné osy stálou úhlovou rychlostí, přičemž osa je v prostoru i v tělese po celou dobu pohybu stálá.

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- **Symetrický setrvačnick** - budeme předpokládat, že osou rotace je z-ová

osa souřadnic : $J_1 = J_2 \neq J_3$

$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_1) = 0$$

$$J_1 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = 0$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} = 0 \Rightarrow \Omega_z = konst.$$

- Rovnice upravíme:

$$\frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z \frac{J_3 - J_1}{J_1} = 0 \Rightarrow \Omega_y = -\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega_x}{dt}$$

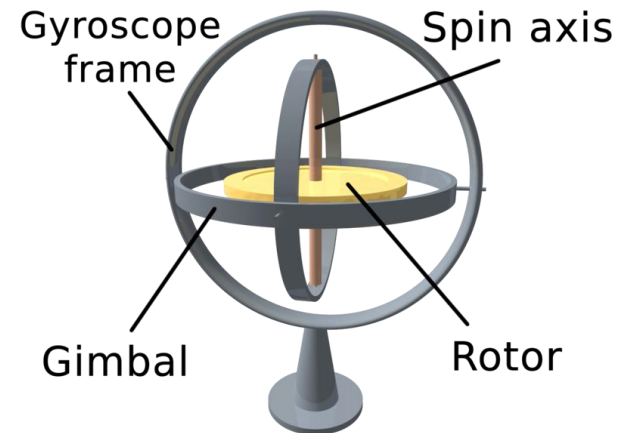
$$\frac{d\Omega_y}{dt} - \Omega_x \Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\Omega_x}{dt^2} + \Omega^2 \Omega_x = 0$$

$$\Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = \Omega = konst.$$

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- Rovnice formálně stejná jako pro harmonický kmit:

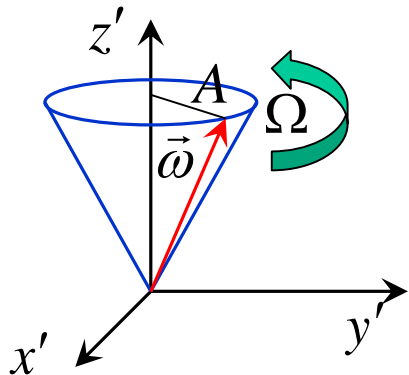
$$\frac{d^2 \Omega_x}{dt^2} + \Omega^2 \Omega_x = 0$$

$$\Omega_x = A \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_y = -\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega_x}{dt} = -A \cos(\Omega t + \alpha)$$

- Počáteční podmínky:

$$\vec{\omega}(t=0) = (\Omega_{0x}, \Omega_{0y}, \Omega_{0z})$$

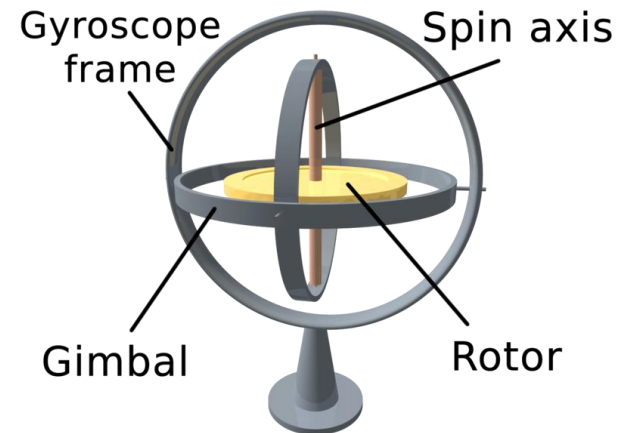


- Rychlost **precese**:

$$\Omega = \Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = \text{konst.}$$

$$\Omega_x^2 + \Omega_y^2 = A^2 [\sin^2(\Omega t + \alpha) + \cos^2(\Omega t + \alpha)] = A^2$$

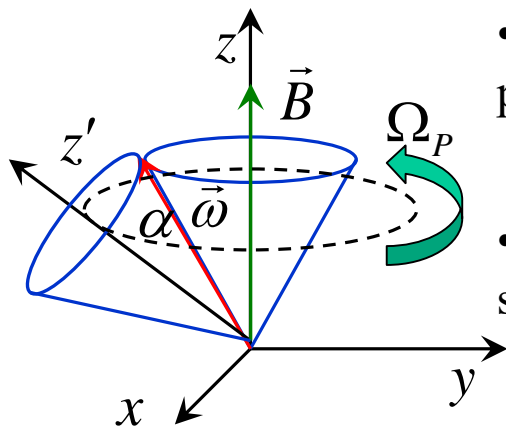
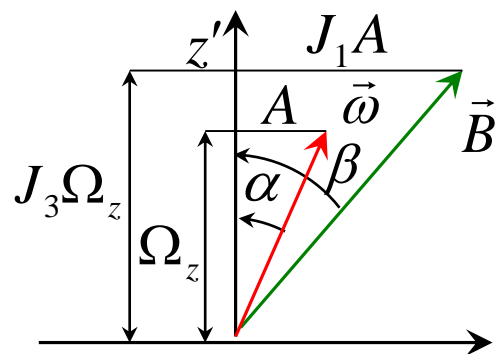
- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).
- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- Pro složky momentu hybnosti dostaneme:

$$\beta_x = J_1 \Omega_x, \beta_y = J_1 \Omega_y, \beta_z = J_3 \Omega_z$$



- vektor momentu hybnosti je pevný v prostoru: $\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$

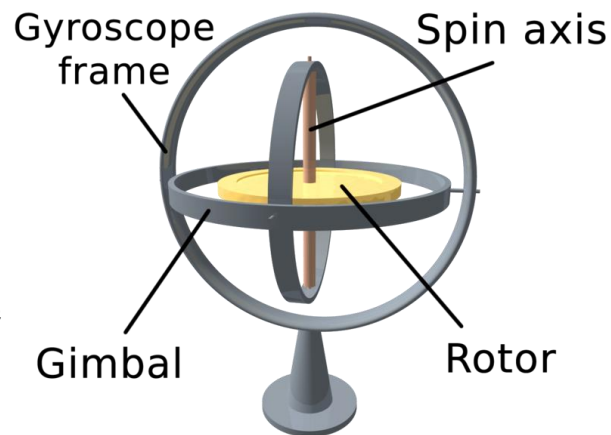
- Rychlost precese osy symetrie setrvačnicku v prostoru:

$$\Omega_p = \omega \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- speciální volba počátečních podmínek:

$$\Omega_x = A \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_y = -A \cos(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_{0x} = \Omega_{0y} = 0, \quad \Omega_{0z} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0, \quad \Omega_x = \Omega_y = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_x = \beta_y = 0, \quad \beta_z = J_z \Omega_z$$

- vektor momentu hybnosti je rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti a pevný v prostoru:

$$\vec{B} // \vec{\omega}, \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0$$

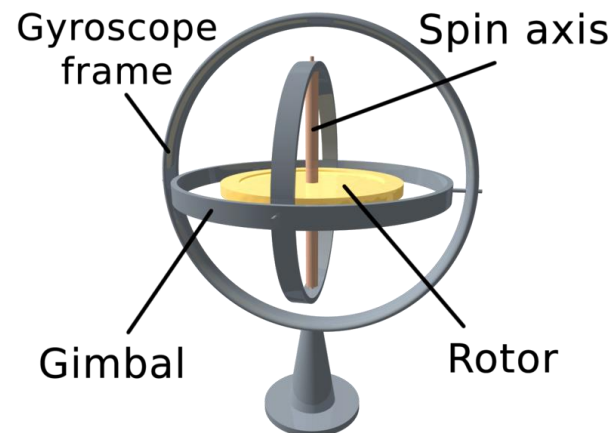
- Osa otáčení má v tělese i prostoru stálý směr a setrvačnick kolem ní rotuje konstantní úhlovou rychlostí:

$$\omega = \Omega_z$$

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

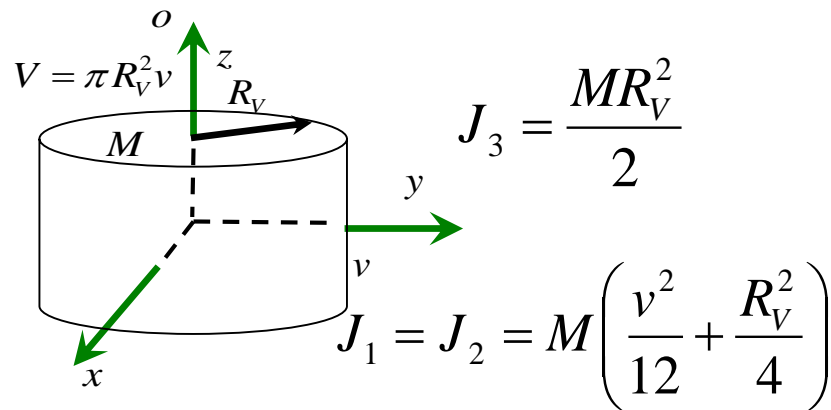
- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



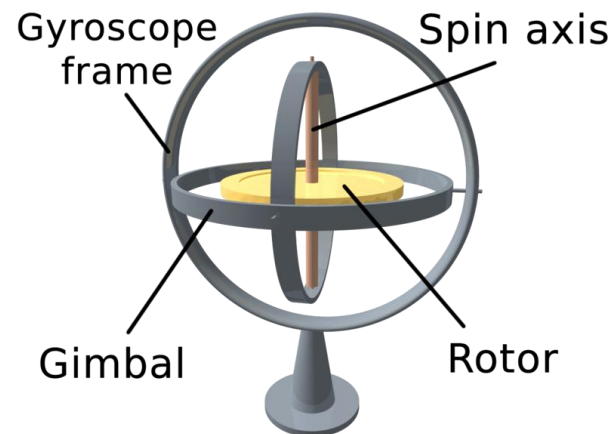
Volný symetrický setrvačník – volná osa

- Osa tělesa, vůči níž může těleso udržovat stálou rotaci, se nazývá **volná osa**. U kulového setrvačníku jsou volné všechny osy procházející hmotným středem. U symetrického setrvačníku jsou volné jak osa symetrie tělesa, tak všechny osy kolmé na osu symetrie procházející hmotným středem.

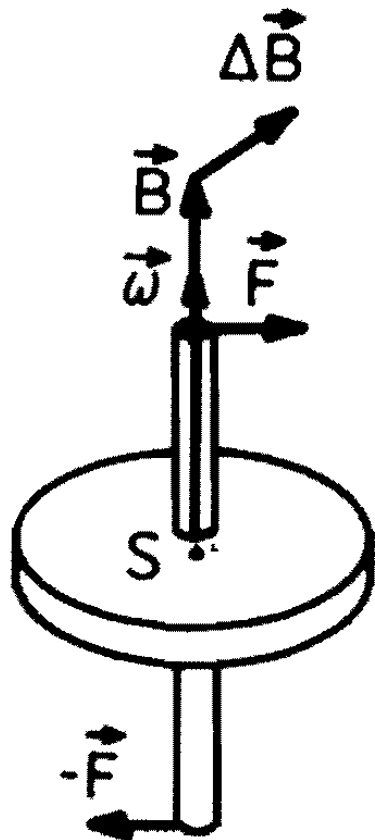
- **Symetrický setrvačník** - dva hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 \neq J_3$



- **Volný (bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).
- např. **Kardanův závěs** – setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



Symetrický setrvačnick



- Osa otáčení setrvačnicku má směr celkového momentu hybnosti. Chceme-li osu otáčení setrvačnicku vychýlit, musíme na něj působit nenulovým :

$$\vec{M} \neq 0$$

- Směr momentu sil je kolmý k vektoru momentu hybnosti a ke směru působících sil.

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \Delta\vec{B} = \vec{M}\Delta t$$

- Přírůstek momentu hybnosti je rovnoběžný s momentem sil a tedy kolmý k vektoru momentu hybnosti. V prvním přiblížení se tedy nemění velikost momentu hybnosti, ale pouze jeho směr.

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T + \vec{\omega} \times \vec{B}$$

- Před působením momentu síly je:

$$\vec{\omega} // \vec{B} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T$$

- Změna momentu hybnosti je v prostoru a v tělese stejná.